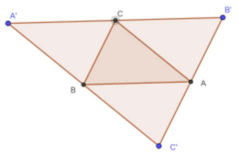
Taller de Geometría (5/2/21):

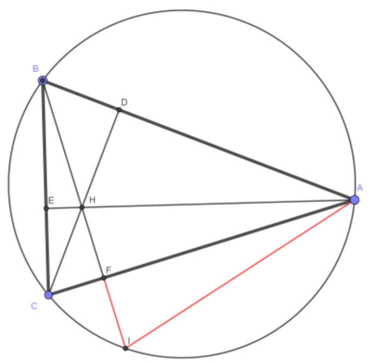
Alturas de un triángulo. Son las rectas perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.

Existencia del ortocentro. Para demostrar que las tres alturas de un triángulo *ABC* son concurrentes en un punto, se trazan paralelas a los lados pasando por los vértices. Se construye así un nuevo triángulo *A'B'C'*



Como *ABCB', ABA'C, CBC'A, CBAB', ACBC'* son paralelogramos, sus lados son iguales, luego *A,B,C* son los puntos medios de los lados de *A'B'C'*. Por tanto, las alturas de *ABC* son las mediatrices de *A'B'C'* que se cortan en un punto, que se llama ortocentro de *ABC*.

Problema. *Demostrar que los simétricos del ortocentro de un triángulo ABC respecto de los tres lados del triángulo están en la circunferencia circunscrita a ABC.*



Sean *D*, *E y F* los pies de las alturas, *H* el ortocentro e *I* el punto de corte de la altura desde *B* y la circunferencia circunscrita a *ABC*. Entonces los ángulos *CAE* y *CBI* son iguales por ser los complementarios de *B* en un triángulo rectángulo. Por el teorema del ángulo inscrito, los ángulos *CBI* y *CAI* son iguales. Por tanto, los ángulos *CAE* y *CAI* son iguales. En suma, *HF=FI*, luego *I* es el simétrico del ortocentro.

Problema (nº3 fase local 2017, retocado). *En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y A'B'C' tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual.*

Solución: A partir del problema anterior, como las circunferencias circunscritas a los dos triángulos coinciden, tienen el mismo circunradio, por lo que el teorema del seno aplicado a los dos triángulos termina el problema.

El problema original del concurso añadía una pregunta sobre si el recíproco es cierto, es decir, si los triángulos tiene un mismo lado también tienen un mismo ángulo. Esto no sería cierto puesto el teorema del seno nos daría igualdad de senos, lo que implica que los ángulos pueden ser suplementarios, y se pueden construir triángulos con esta situación.

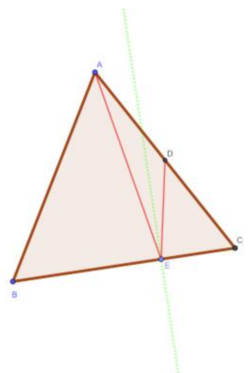
Existencia del baricentro. Se puede demostrar (usando propiedades de homotecias o de vectores) que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto G, llamado baricentro, o centro de gravedad del triángulo. También se puede demostrar como consecuencia trivial del Teorema de Ceva que veremos poco después. Además, el baricentro punto está en cada mediana a 2/3 del vértice y 1/3 del punto medio del lado opuesto. Esto se puede demostrar comprobando que, si M_1,M_2, M_3 son los puntos medios de los lados de ABC, entonces los triángulos ABC y $M_1M_2M_3$ son homotéticos de centro G y razón -1/2.

Recta de Euler. Siguiendo con el razonamiento anterior se puede probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo están alineados, la recta común se llama recta de Euler.

Fórmulas del área S de un triángulo, conocidos:

1. Base, b, y altura h: $S = ½\ bh$
2. Dos lados a,b y el ángulo $\hat{C}$ que abarcan: $S=½\ ab$ sen $\hat{C}$. Se obtiene a partir de la anterior, utilizando la definición del seno de un ángulo.

Problema Fase Local OME 2019 (nº 3) (ligeramente adaptado). *Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A, rebota en el lado BC, en el punto E, y corta al lado AC en su punto medio D. Calcular el área del triángulo ADE*



El criterio de semejanza ALA nos permite afirmar que los triángulos ABE y DCE son semejantes, y la razón de semejanza es ½, ya que el ángulo en E de ambos triángulos es el mismo por la propiedad de reflexión de la luz; el ángulo en B del primero y en C del segundo es 60º, y $AB=2DC$. Por tanto, el área del primero es 4 veces el área del segundo, y $BE=2EC$. Por tanto $EC=2$, $BE=4$, $CD=3$. Si aplicamos la fórmula 2 del área, tenemos que el área de los triángulos ABC, ABE y DCE es, respectivamente, $9\sqrt{3},\ 6\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$. El cálculo restante ya es trivial.

Problema (nº 962 en https://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/) ¿Es posible construir un cuadrilátero convexo tal que las diagonales lo dividan en cuatro triángulos con áreas en la proporción 1:2:3:4?

Solución. Usar las fórmulas 1 o 2 del área del triángulo para obtener los cocientes de las áreas de los triángulos *OAB* y *OBC*, donde *O* es el punto de corte de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.

Comparar con el cociente de las áreas de *OAD* y *OCD*. Verificar la imposibilidad con lo que se pretende en el enunciado.

3. Lados a,b,c (fórmula de Herón). Si $p=(a+b+c)/2$, y R es el circunradio:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

En https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Her%C3%B3n se puede encontrar una demostración de la formula de Herón que solo utiliza el teorema de Pitágoras. La segunda igualdad es trivial usando el teorema del seno y 2.

4. Semiperímetro e inradio r : $S = pr$. Para obtener esta fórmula, con el incentro I, calcular el área de los triángulos *IAB*, *IAC* e *IBC* y sumar.

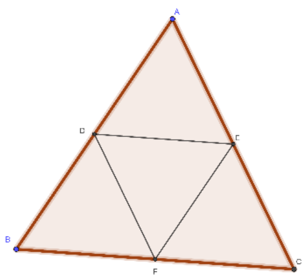
Problema. *Demostrar que en un triángulo equilátero ABC la suma de las distancias desde un punto interior P a cada uno de los lados es igual a la altura del triángulo.*

Sumar las áreas de los triángulos *PAB, PAC y PBC*.

También es cierta la afirmación (recíproca): si d_1,d_2,d_3 son tres números reales tales que $d_1+d_2+d_3=h$, altura de un triángulo equilátero, existe un único (fijando los tres lados) punto P en ese triángulo tal que dista esas distancias de los lados del triángulo.

Problema (J.L. Díaz)**.** *Un listón de madera se corta aleatoriamente en tres trozos. ¿Cuál es la probabilidad de que con los tres trozos se pueda hacer un triángulo?*

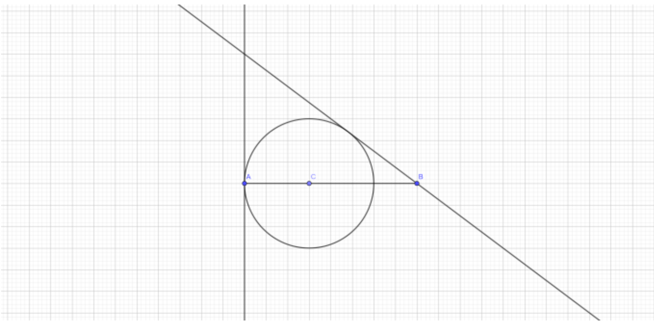
Solución: Sea l la longitud del listón, que se divide en tres trozos, de longitud a,b,c , $a+b+c=l$.
Para que se pueda hacer un triángulo con los tres trozos deben cumplirse las tres condiciones: $a<b+c$; $b<a+c$; $c<a+b$. Sumando a, b , c, respectivamente, a cada una de las desigualdades, se obtienen las equivalentes: $a<l/2$; $b<l/2$; $c<l/2$.
Si construimos un triángulo equilátero *ABC* de altura l, y trazamos las paralelas a sus lados por la mitad de estos, queda la figura siguiente:



Los puntos correspondientes al interior del triángulo DEF corresponden a los que distan de cada uno de los lados distancias, a, b, c tales que $a+b+c=l$ y verifican que $a<l/2$; $b<l/2$; $c<l/2$.Por tanto, la probabilidad que nos piden es 1/4, que es el cociente entre el área de los casos favorables y el área de los casos posibles.

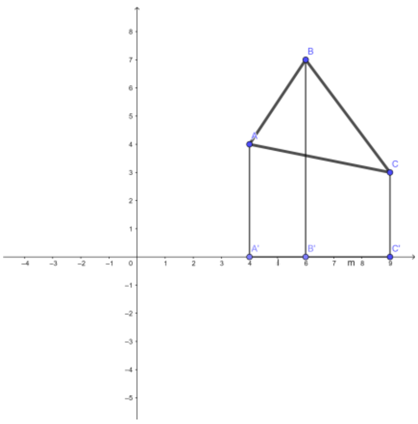
Problema Fase Local OME 2019 (nº 4) (ligeramente adaptado). *Sea* $p \geq 3$ *un número primo y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor* p^2*-1 y cateto menor 2p. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa y al cateto menor. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p. Determine los valores de p para los que r es también entero.*

Idea: Usando Pitágoras se obtiene que la hipotenusa es $p^2 + 1$. Por semejanzas de triángulos se obtiene que $r = \frac{2p(p-1)}{p+1}$. Por el carácter primo de *p* se deduce que la única solución posible es *p=3*.



5. Coordenadas de los vértices $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$,

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

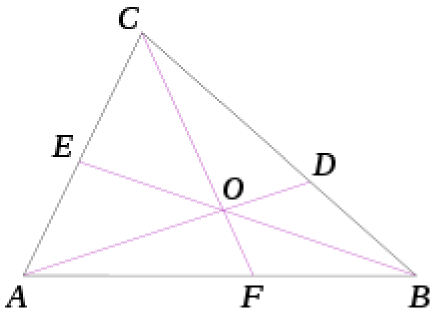


Para obtener esta fórmula, calcular S mediante la suma algebraica de los trapecios *ABA'B', BCB'C' y ACA'C'*. El valor del determinante está considerado aquí en valor absoluto.

Teorema de Ceva. *Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, y F que se encuentran sobre los lados BC, CA, y AB respectivamente, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si* $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

Esta relación es fácil de recordar si recorremos el perímetro del triángulo en un sentido. El primer segmento es el determinado por el vértice de partida al punto de división que se encuentra sobre el lado en el que nos estamos moviendo, el segundo segmento es el que va desde este último punto al segundo vértice, y así sucesivamente, hasta retornar al vértice de partida.

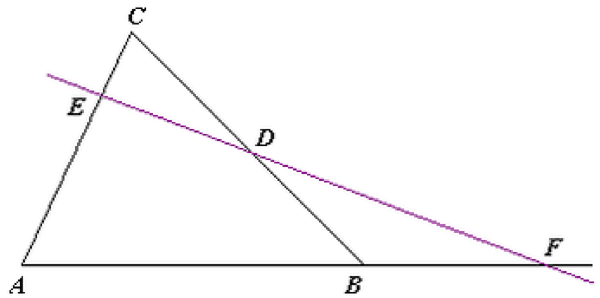
Idea para el Teorema directo: Comprobar que el cociente *AF/FB* coincide con el cociente de las áreas de los triángulos *OAC y OBC*. Lo análogo con los otros casos.



Como consecuencia del teorema recíproco, la existencia del baricentro es trivial.

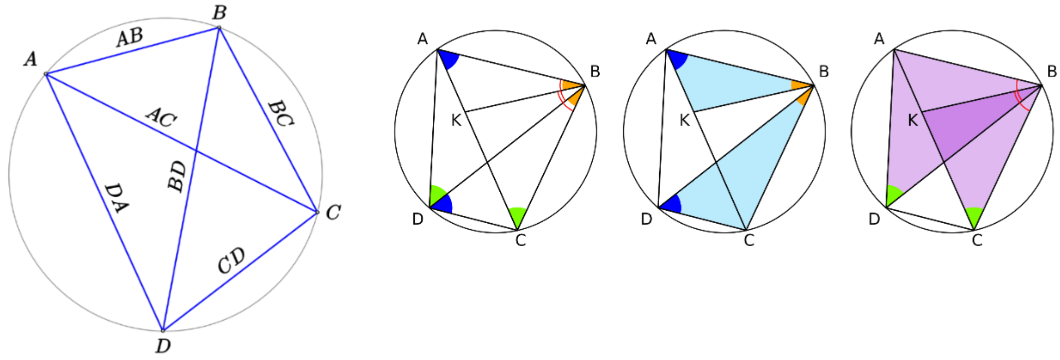
Teorema de Menelao. *Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (o sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales (o están alineados) si y sólo si* $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

Si estamos considerando segmentos dirigidos, el número anterior será -1, en vez de 1.



Idea para el teorema directo: trazar perpendiculares desde *A, B y C* a la recta *DE.*

Teorema de Ptolomeo. *Cuatro puntos A, B, C, D dados son cocíclicos (están en una misma circunferencia) si y sólo si el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos: AC.BD=AB.CD+AD.BC*



1. Sea *ABCD* un cuadrilátero cíclico.

2. Note que en el segmento *BC*, ángulos inscritos $\angle BAC = \angle BDC$, y en *AB*, $\angle ADB = \angle ACB$.
3. Ahora, por ángulos comunes $\triangle ABK$ es semejante a $\triangle DBC$, y $\triangle ABD \sim \triangle KBC$
4. Por lo tanto $AK/AB = CD/BD$, y $CK/BC = DA/BD$,
    1. Por lo tanto $AK\cdot BD = AB\cdot CD$, y $CK\cdot BD = BC\cdot DA$;
    2. Lo que implica $AK\cdot BD + CK\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$
    3. Es decir, $(AK+CK)\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$;
    4. Pero $AK+CK = AC$, por lo tanto $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$; como se quería demostrar.

Aplicación: encontrar la razón áurea como la razón entre diagonales y lados de un pentágono regular.

Problema (J.L. Díaz) *Sea ABCD un cuadrilátero convexo y P, Q los puntos medios de los lados CD, AB, respectivamente. Supongamos que AP, DQ se cortan en X y BP, CQ se cortan en Y. Demuestre que [ADX] + [BCY] = [PXQY]* . Los corchetes representan el área del polígono correspondiente.

Solución: Tenemos $[ADQ] = [DQB]$ y $[DPB] = [PBC]$ los triángulos tiene una misma base y una misma altura. Sumando ambas expresiones tenemos

$$[ADQ] + [BPC] = [DQB] + [DBP] = [DQBP]$$
$$= [BPQ] + [DQP] = [APQ] + [CQP];$$

Ya que PQ es una mediana de ambos triángulos *APB* y *CQD*. Escribiéndolo en térmisno de áreas más pequeñas, tenemos que

$$[AXQ] + [ADX] + [BYC] + [PCY] = [AXQ] + [PXQ] + [PCY] + [PYQ]$$

De donde se obtiene por cancelaciones lo que se pretendía.

Problema (J.L. Díaz) *Sea P un punto interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados BC,CA y AB, respectivamente. Encuentre la posición de P para los que la expresión*

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

alcance su valor mínimo.

Problema (J.L. Díaz) *Demuestre que en cualquier triángulo XYZ, de lados x, y , z verifica*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\sqrt{3}A + (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

donde A es el área del triánguloXYZ (desigualdad de Hadwiger-Finsler).